Théorème d'Alembert-Gauss :
1e démonstration

Résumé

Il existe pleins de preuves de ce théorème ; il n'y a apparemment pas de démonstration purement algébrique. Celle qui est présentée ici utilise un argument de compacité.

références : [Gdg 86]

Questions

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, unitaire, de degré n≥ 1.

a) Montrer qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|P(z_0)| = inf_{z\in\mathbb{C}} |P(z)|$.

b) Montrons que $P(z_0) = 0$.

Supposons que $P(z_0) \neq 0$ et considérons le polynôme
$Q(X) = \frac{P(z_0+X)}{P(z_0)} = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$.

(i) Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $Q(z) = 1 + b_k z^k(1 + \varphi(z))$ avec
$k = inf \{i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n \ / \ b_i \neq 0\}$ et φ une fonction qui tend vers zéro à l'infini.

(ii) Trouver un z tel que $|Q(z)| < 1$ et conclure.

Indications

a) utiliser le fait que $lim_{|z|\to+\infty} |P(z)| = +\infty$ (à justifier), et utiliser un argument de compacité

b) (i) RAS

(ii) on pourra utiliser les écritures trigonométriques de b_k et z
($b_k = |b_k| e^{i\theta}$ et choisir $z = \rho e^{-i(\theta+\pi)/k}$ en prenant ρ suffisamment petit)

Eléments de réponses

a)

– $\underset{\sim}{lim_{|z|\to+\infty}|P(z)|=+\infty}$:
on peut poser $P(X)=X^n+a_1X^{n-1}+...+a_{n-1}X+a_n$ puis pour $z\in\mathbb{C}^*$ écrire $P(z)=z^n(1+\frac{a_1}{z}+...+\frac{a_{n-1}}{z^{n-1}}+\frac{a_n}{z^n})$ ce qui permet de conclure (quels arguments précis on utilise ?).

– $inf_{z\in\mathbb{C}}|P(z)|=inf_{z\in K}|P(z)|$ pour un certain compact K :
il existe M>0 tel que pour tout z tel que $|z|>M$, $|P(z)|>|P(0)|$, et on prend $K=\{z\ /\ |z|\leq M\}$.

– La continuité de l'application $z\longmapsto|P(z)|$ sur le compact K mène au résultat attendu.

b) (i) clair ($b_0=1$; $k=inf\,\{i\in\mathbb{N},1\leq i\leq n\ /\ b_i\neq 0\}$ existe puisque $b_n\neq 0$)

(ii)

– D'abord, fixons un r>0 tel que pour z vérifiant $|z|<r$ on ait $|\varphi(z)|\leq 1/2$.

– En écrivant $b_k=|b_k|\,e^{i\theta}$ pour un $\theta\in\mathbb{R}$ et en choisissant $z=\rho e^{-i(\theta+\pi)/k}$ pour $0<\rho<r$, on obtient $Q(z)=1-|b_k|\,\rho^k(1+\varphi(z))$.
Donc $|Q(z)|\leq\left|1-|b_k|\,\rho^k\right|+\left|b_k\rho^k\varphi(z)\right|\leq\left|1-|b_k|\,\rho^k\right|+\frac{1}{2}\,|b_k|\,\rho^k$
et en prenant ρ suffisammment petit pour que $1-|b_k|\,\rho^k$ soit >0, on obtient $|Q(z)|\leq 1-\frac{1}{2}\,|b_k|\,\rho^k<1$.

– Ce qui prouve que $|P(z_0+z)|<|P(z_0)|$, ce qui est absurde.

Commentaires

* Dans la 1e question, on a ramener la borne inf sur $\mathbb{C}$ à une borne inf sur un compact, ce qui a permis de conclure. Dans la 2e question, on a raisonné par l'absurde et montrer que dans ce cas on peut trouver une direction z telle que $|P(z_0+z)|<|P(z_0)|$ qui mène à une absurdité ; c'est la partie un petit peu technique avec des manipulations d'inégalités.

* Le fait de supposer que P est unitaire n'apporte pas de réelle simplifica-

tion, on peut largement s'en passer.

* Dans la 1e question, on a utiliser le fait que toute fonction réelle continue sur un métrique compact est bornée et atteint ses bornes. On pourra préférer un argument qui utilise des suites en appliquant le théorème de Bolzano-Weierstrass : toute suite complexe bornée admet une sous-suite convergente. (Essayez, c'est très simple !)

* Petite question : ici on a utilisé un argument de compacité d'une boule fermée sur $\mathbb{C}$; peut-on alors utiliser ce théorème pour illustrer la leçon "206 : Parties compactes de $\mathbb{R}^n$. Fonctions continues sur une telle partie. Exemples et applications" qui concerne les compacts de $\mathbb{R}^n$?

* Ce théorème apparaît de manière fondamentale dans la leçon 143 "Polynômes à une indéterminée à coefficients réels ou complexes"' ; cette démonstration est assez simple pour être retenue.

Prolongements

* On trouvera d'autres démonstrations utilisant des techniques variées (cf autres papiers).

* Ce qui se passe dans la 1e question est un phénomène général non spécifique aux polynômes :
soit E un evn de dimension finie ; soit F un fermé non vide non borné de E et $f : F \to \mathbb{R}$ une fonction continue ; si $lim_{||x|| \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors f atteint son minimum. [gdy 33]

* (Hors-programme ... mais pas tout à fait)
On a aussi plus généralement le phénomène suivant pour les fonctions holomorphes : pour une fonction holomorphe non constante sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$, si $|f|$ admet un minimum local dans U, alors ce minimum est nécessairement nul (conséquence immédiate du principe du maximum).

On parlant de fonction holomorphe, on peut démontrer immédiatement le théorème d'Alembert-Gauss en appliquant le théorème de Liouville : toute fonction entière bornée est constante.

Les fonctions holomorphes ne sont pas au programme dans le sens où il n'y a pas de connaissance à avoir dans ce domaine, mais on peut parfaitement vous y emmener à l'écrit : on pourra voir le sujet 2 de 2010 (partie II) où l'on redémontre le théorème de Liouville.

****